

12.1

Polynomifunktio $f(x) = x^3 - 6x^2$ saa suljetulla välillä $-3 \leq x \leq 4$ suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6 \cdot 2x \\ &= 3x^2 - 12x \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 - 12x = 0$$

Erotetaan yhteinen tekijä x .

$$x(3x - 12) = 0$$

Käytetään tulon nollasääntöä.

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 3x - 12 = 0 \quad | +12$$

$$3x = 12 \quad | :3$$

$$x = 4$$

Molemmat nollakohdat kuuluvat välille $-3 \leq x \leq 4$.

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvissa derivaattafunktion nollakohdissa.

$$f(x) = x^3 - 6x^2$$

$$f(-3) = (-3)^3 - 6 \cdot (-3)^2 = -81 \quad \text{pienin}$$

$$f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 = -32$$

$$f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 = 0 \quad \text{suurin}$$

Välillä $-3 \leq x \leq 4$ funktion f suurin arvo on 0 ja pienin arvo -81 .

Vastaus

suurin 0 , pienin -81

12.2

Polynomifunktio $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - x + 4$ saa suljetulla välillä $0 \leq x \leq 1$ suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4}{3} \cdot 3x^2 - 1 + 0 \\ &= 4x^2 - 1 \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 1 &= 0 && | +1 \\ 4x^2 &= 1 && | :4 \\ x^2 &= \frac{1}{4} \\ x &= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vain nollakohta $x = \frac{1}{2}$ kuuluu välille $0 \leq x \leq 1$.

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f(x) = \frac{4}{3}x^3 - x + 4$$

$$f(0) = \frac{4}{3} \cdot 0^3 - 0 + 4 = 4$$

$$f(1) = \frac{4}{3} \cdot 1^3 - 1 + 4$$

$$= \frac{4}{3} + 3$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{9}{3} = \frac{13}{3} \quad (\approx 4,3) \quad \text{suurin}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} + 4$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{3} \cdot \frac{1}{\underset{2}{\cancel{8}}} - \overset{3}{\frac{1}{2}} + 4$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{3}{6} + 4$$

$$= -\frac{2}{6} + 4$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{12}{3} = \frac{11}{3} \quad (\approx 3,7)$$

Välillä $0 \leq x \leq 1$ funktion f suurin arvo on $\frac{13}{3}$.

Vastaus

$$\frac{13}{3}$$

12.3

- a) Polynomifunktio $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ saa suljetulla välillä $[0, 3]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa

Määritetään derivaattafunktio.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{Derivoidaan CAS-laskimella.}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

Molemmat nollakohdat kuuluvat välille $[0, 3]$.

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä sekä välille kuuluvissa derivaattafunktion nollakohdissa.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{Tallennetaan funktion } f \text{ lauseke CAS-laskimeen.}$$

$$f(0) = 0 \quad \text{pienin}$$

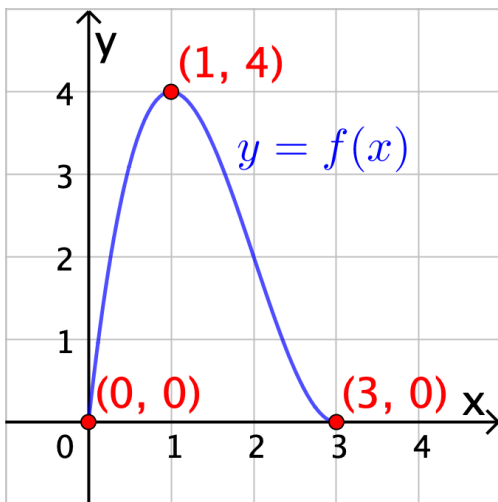
$$f(3) = 0 \quad \text{pienin}$$

$$f(1) = 4 \quad \text{suurin}$$

Suurin arvo on 4, ja sen funktio saa kohdassa $x = 1$.

Pienin arvo on 0, ja sen funktio saa kohdissa $x = 0$ ja $x = 3$.

- b) Piirretään funktion f kuvaaja välillä $[0, 3]$.



Kuvaajan perusteella a-kohdassa tehdyt havainnot pitävät paikkaansa:

- suurin arvo 4, ja sen funktio saa kohdassa $x = 1$
- pienin arvo 0, ja sen funktio saa kohdissa $x = 0$ ja $x = 3$.

Vastaus

- a) suurin arvo 4 kohdassa $x = 1$,
pienin arvo 0 kohdissa $x = 0$ ja $x = 3$

12.4

Polynomifunktio $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ saa suljetulla välillä $[-1, 1]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa

Määritetään derivaattafunktio.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

Derivoidaan CAS-laskimella.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad x = 1$$

Molemmat nollakohdat kuuluvat välille $[-1, 1]$.

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä sekä välille kuuluvissa derivaattafunktion nollakohdissa.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

Tallennetaan funktion f lauseke CAS-laskimeen.

$$f(-1) = -3$$

pienin

$$f(1) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{31}{27} \quad (\approx 1,1)$$

suurin

Suurin arvo on $\frac{31}{27}$, ja sen funktio saa kohdassa $x = \frac{1}{3}$.

Pienin arvo on -3 , ja sen funktio saa kohdassa $x = -1$.

Vastaus

suurin arvo $\frac{31}{27}$ kohdassa $x = \frac{1}{3}$,

pienin arvo -3 kohdassa $x = -1$

12.5

Polynomifunktio $f(x) = x^2 - 18x + 80$ saa suljetulla välillä suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = 2x - 18 + 0 = 2x - 18$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{array}{rcl} 2x - 18 = 0 & | +18 \\ 2x = 18 & | :2 \\ x = 9 \end{array}$$

a) Nollakohta $x = 9$ kuuluu välille $7 \leq x \leq 10$.

Lasketaan funktion f arvo välin $7 \leq x \leq 10$ päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f(x) = x^2 - 18x + 80$$

$$f(7) = 7^2 - 18 \cdot 7 + 80 = 3 \quad \text{suurin}$$

$$f(10) = 10^2 - 18 \cdot 10 + 80 = 0$$

$$f(9) = 9^2 - 18 \cdot 9 + 80 = -1 \quad \text{pienin}$$

Välillä $7 \leq x \leq 10$ funktion f suurin arvo on 3 ja pienin arvo -1.

b) Nollakohta $x = 9$ ei kuulu välille $5 \leq x \leq 8$.

Lasketaan funktion f arvo välin $5 \leq x \leq 8$ päätepisteissä.

$$f(x) = x^2 - 18x + 80$$

$$f(5) = 5^2 - 18 \cdot 5 + 80 = 15 \quad \text{suurin}$$

$$f(8) = 8^2 - 18 \cdot 8 + 80 = 0 \quad \text{pienin}$$

Välillä $5 \leq x \leq 8$ funktion f suurin arvo on 15 ja pienin arvo 0.

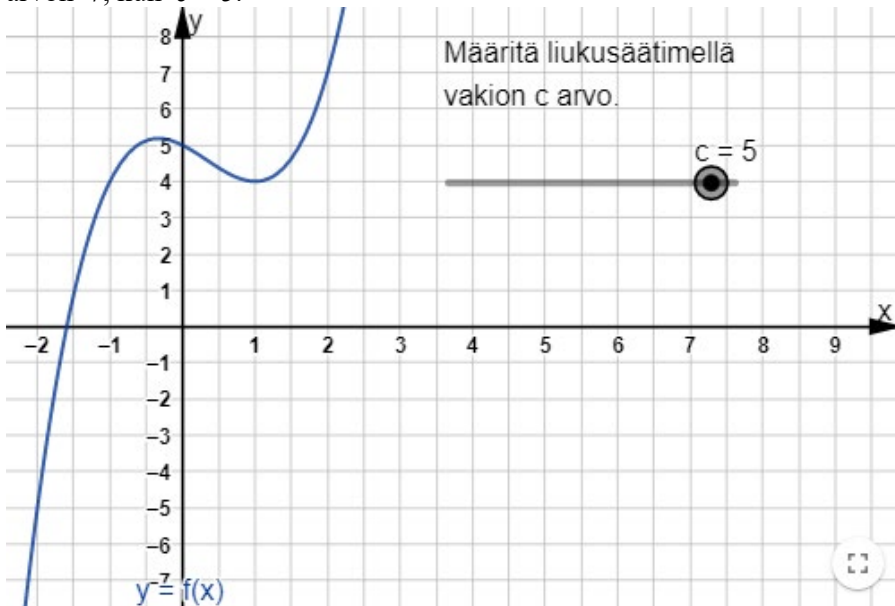
Vastaus

a) suurin arvo 3, pienin arvo -1

b) suurin arvo 15, pienin arvo 0

12.6

- a) Liikusäätimen avulla voidaan tutkia, että välillä $0 \leq x \leq 2$ funktio saa arvon 7, kun $c = 5$.



- b) Polynomifunktio $f(x) = x^3 - x^2 - x + c$ saa suljetulla välillä $0 \leq x \leq 2$ suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = -\frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad x = 1$$

Vain nollakohta $x = 1$ kuuluu välillä $0 \leq x \leq 2$.

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvissa derivaattafunktion nollakohdissa.

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + c$$

$$f(0) = 0^3 - 0^2 - 0 + c = c$$

$$f(2) = 2^3 - 2^2 - 2 + c = c + 2 \text{ suurin}$$

$$f(1) = 1^3 - 1^2 - 1 + c = c - 1$$

Välillä $0 \leq x \leq 2$ funktion f suurin arvo on $c + 2$. Funktion suurimman arvon tulee olla 7, joten

$$c + 2 = 7 \quad | -2$$

$$c = 5.$$

Vastaus

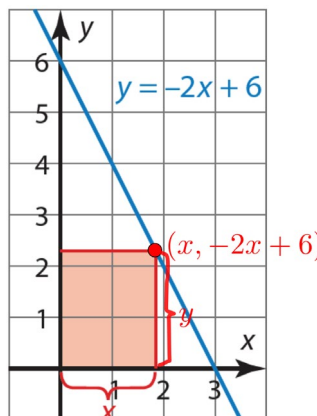
$$c = 5$$

12.7

- a) Kohdassa x suoralla olevan pisteen y -koordinaatti on $-2x + 6$. Siten suorakulmion korkeus on $-2x + 6$.

Suorakulmion pinta-ala on

$$\begin{aligned} x \cdot (-2x + 6) & \quad A = \text{kanta} \cdot \text{korkeus} \\ &= -2x^2 + 6x. \end{aligned}$$



- b) Suorakulmion leveys voi olla pienimmillään 0 ja kuvan perusteella suurimmillaan 3.

Pitää siis määrittää kohta, jossa funktio $A(x) = -2x^2 + 6x$ saa suurimman arvonsa välillä $0 \leq x \leq 3$.

Määritellään CAS-laskimeen funktio $A(x) = -2x^2 + 6x$.

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä $0 \leq x \leq 3$ kohta, jossa funktion A arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi $x = \frac{3}{2}$.

Suurin pinta-ala on $A(\frac{3}{2}) = \frac{9}{2}$.

Vastaus

- a) korkeus $-2x + 6$, pinta-ala $-2x^2 + 6x$

- b) $x = \frac{3}{2}$, pinta-ala $\frac{9}{2}$

12.8

Polynomifunktio f saa suljetulla välillä $[0, 24]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f(t) = -0,0008t^3 - 0,0393t^2 + 1,3332t + 15,1940$$

Derivoidaan
CAS-laskimella.

$$f'(t) = -0,0024t^2 - 0,0786t + 1,3332$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-0,0024t^2 - 0,0786t + 1,3332 = 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$t \approx -45,074 \quad \text{tai} \quad t \approx 12,324$$

Vain nollakohta $t \approx 12,324$ kuuluu välille $[0, 24]$.

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä sekä välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f(t) = -0,0008t^3 - 0,0393t^2 + 1,3332t + 15,1940$$

$$f(0) = 15,1940$$

$$f(24) \approx 13,495$$

$$f(12,324) \approx 24,158 \quad \text{suurin}$$

Välillä $[0, 24]$ funktion f suurin arvo on $24,158 \text{ C}^\circ \approx 24 \text{ C}^\circ$.

Suurin arvo saadaan, kun

$$t \approx 12,324 \text{ h}$$

$$= 12 \text{ h} + 0,324 \cdot 60 \text{ min}$$

$$= 12 \text{ h} + 19,44 \text{ min}$$

$$\approx 12 \text{ h} + 19 \text{ min}$$

Vastaus

korkein lämpötila 24 C° kello 12.19

12.9

Merkitään välillä $[0, 1]$ olevaa lukua kirjaimella x . Tällöin toinen luku on $x - 1$.

Tutkittava tulo on $x \cdot (x - 1)^2$ Sievennetään CAS-laskimella.
 $= x^3 - 2x^2 + x$.

On siis määritettävä polynomifunktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ suurin arvo välillä $[0, 1]$. Suurimman arvon funktio saa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ Derivoidaan CAS-laskimella.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$
 Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad x = 1$$

Molemmat nollakohdat kuuluvat välille $[0, 1]$.

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvissa derivaattafunktion nollakohdissa.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27} \quad \text{suurin}$$

Tulon suurin mahdollinen arvo on $\frac{4}{27}$.

Vastaus

$$\frac{4}{27}$$

12.10

Funktion $f(x) = 2x^2 - x + 5$ arvojen muutosnopeuden kertoo derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot 2x - 1 + 0 \\ &= 4x - 1 \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} 4x - 1 &= 0 && | +1 \\ 4x &= 1 && | :4 \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x - 1 \\ f'(0) &= 4 \cdot 0 - 1 = -1 < 0 && - \\ f'(1) &= 4 \cdot 1 - 1 = 3 > 0 && + \end{aligned}$$

Derivaatta on negatiivinen, kun $x < \frac{1}{4}$. Siis funktion f arvot pienenevät, kun $x < \frac{1}{4}$. Pitää määrittää derivaattafunktion $f'(x) = 4x - 1$ pienin arvo suljetulla välillä $-1 \leq x \leq \frac{1}{4}$.

Derivaattafunktion $f'(x) = 4x - 1$ kuvaaja on nouseva suora, joten derivaattafunktio saa välillä $-1 \leq x \leq \frac{1}{4}$ pienimmän arvonsa välin alkupisteessä $x = -1$. Siis funktion $f(x) = 2x^2 - x + 5$ pienenevät välillä $-1 \leq x \leq 3$ nopeimmin kohdassa $x = -1$.

Vastaus

$$x = -1$$

12.11

Polynomifunktio $f(x) = x^3 - 12x$ saa suljetulla välillä $-3 \leq x \leq 5$ suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 - 12 = 0 \quad | +12$$

$$3x^2 = 12 \quad | :3$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \sqrt{4} = 2 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{4} = -2$$

Molemmat nollakohdat kuuluvat välille $-3 \leq x \leq 5$.

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvissa derivaattafunktion nollakohdissa.

$$f(x) = x^3 - 12x$$

$$f(-3) = (-3)^3 - 12 \cdot (-3) = 9$$

$$f(5) = 5^3 - 12 \cdot 5 = 65 \quad \text{suurin}$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) = 16$$

$$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = -16 \quad \text{pienin}$$

Välillä $-3 \leq x \leq 5$ funktion f suurin arvo on 65 ja pienin arvo -16.

Vastaus

suurin arvo 65, pienin arvo -16

12.12

- a) Polynomifunktio $f(x) = 2x^3 - 65x^2 + 500x$ saa suljetulla välillä $[-2, 20]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa

Määritetään derivaattafunktio.

$$f(x) = 2x^3 - 65x^2 + 500x \quad \text{Derivoidaan CAS-laskimella.}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 130x + 500$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$6x^2 - 130x + 500 = 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{50}{3} (\approx 16,7)$$

Molemmat nollakohdat kuuluvat välille $[-2, 20]$.

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä sekä välille kuuluvissa derivaattafunktion nollakohdissa.

$$f(x) = 2x^3 - 65x^2 + 500x \quad \begin{array}{l} \text{Tallennetaan funktion } f \text{ lauseke} \\ \text{CAS-laskimeen.} \end{array}$$

$$f(-2) = -1276$$

pienin

$$f(20) = 0$$

$$f(5) = 1125$$

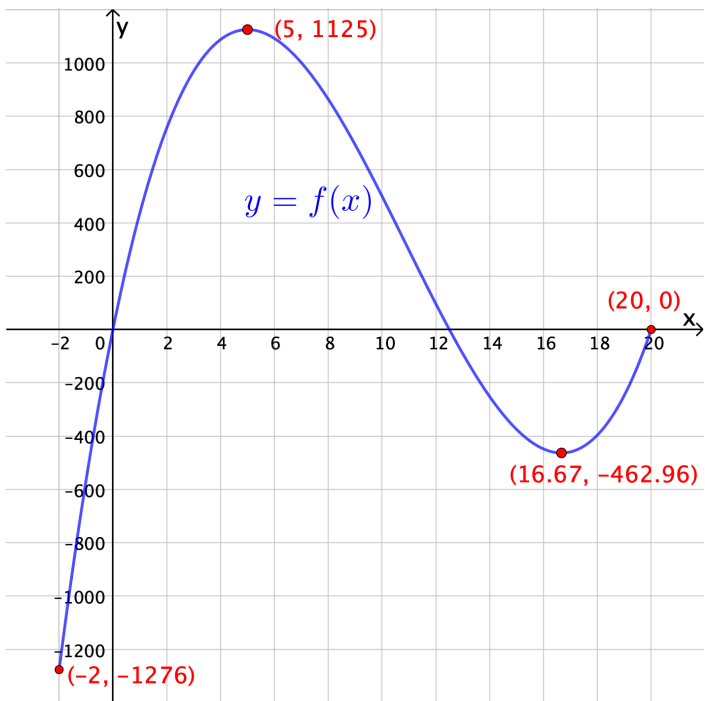
suurin

$$f\left(\frac{50}{3}\right) = -\frac{12\,500}{27} (\approx -462)$$

Suurin arvo on 1125, ja sen funktio saa kohdassa $x = 5$.

Pienin arvo on -1276, ja sen funktio saa kohdassa $x = -2$.

- b) Piirretään funktion f kuvaaja välillä $[-2, 20]$.



Kuvaajan perusteella a-kohdassa tehdyt havainnot pitävät paikkaansa:

- suurin arvo 1125, ja sen funktio saa kohdassa $x = 5$
- pienin arvo -1276, ja sen funktio saa kohdassa $x = -2$

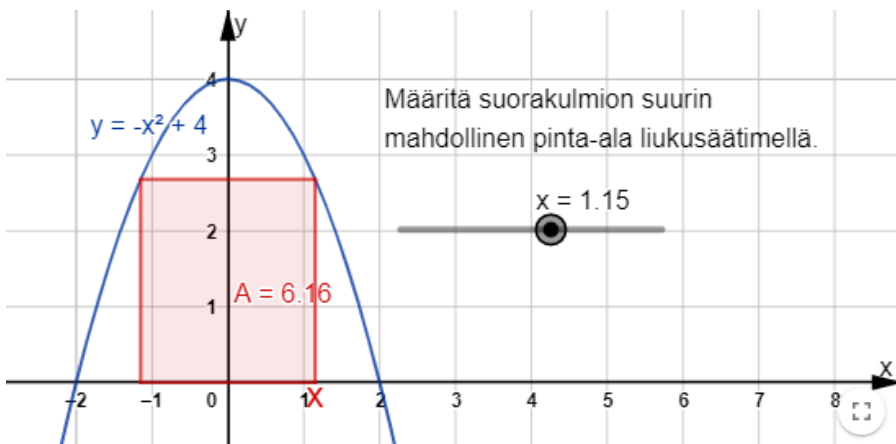
Vastaus

suurin arvo 1125 kohdassa $x = 5$,

pienin arvo -1276 kohdassa $x = -2$

12.13

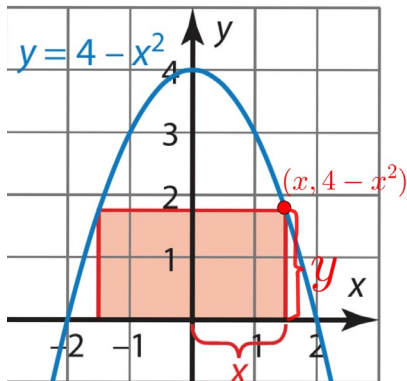
- a) Appletilla tutkimalla nähdään, että suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala saadaan, kun $x = 1,15$.



- b) Suorakulmion leveys on $2x$.

Kohdassa x paraabelilla olevan pisteen y -koordinaatti on $4 - x^2$. Siten suorakulmion korkeus on $4 - x^2$.

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee suorakulmion pinta-alan.



$$\begin{aligned} A(x) &= 2x \cdot (4 - x^2) \\ &= 8x - 2x^3 \end{aligned}$$

Kuvan perusteella muuttujan x arvot ovat suljetulla välillä $0 \leq x \leq 2$. Polynomifunktio $A(x) = 8x - 2x^3$ saa suljetulla välillä $[0, 2]$ suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$A(x) = 8x - 2x^3$$

$$A'(x) = 8 - 6x^2$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$8 - 6x^2 = 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} (\approx -1,15) \quad \text{tai} \quad x = \frac{2\sqrt{3}}{3} (\approx 1,15)$$

Vain nollakohta $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ kuuluu välillä $[0, 2]$.

Lasketaan funktion A arvot välin päätepisteissä ja välillä kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$A(x) = 8x - 2x^3$$

$$A(0) = 0$$

$$A(2) = 0$$

$$A\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{32\sqrt{3}}{9} (\approx 6,16)$$

Suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala on $\frac{32\sqrt{3}}{9}$.

Vastaus

a) 6,16

b) $\frac{32\sqrt{3}}{9}$

12.14

Polynomifunktio $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ saa suljetulla välillä $[-2, 0]$ suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2x - 1 + 0 \\ &= 3x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 - 2x - 1 = 0 \qquad a = 3, b = -2, c = -1$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 4}{6}$$

$$x = \frac{2+4}{6} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2-4}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Vain nollakohta $x = -\frac{1}{3}$ kuuluu välillä $[-2, 0]$.

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$f(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - (-2) + 1 = -9 \quad \text{pienin}$$

$$f(0) = 0^3 - 0^2 - 0 + 1 = 1$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 1$$

$$= -\frac{1}{27} - \overset{3)}{\frac{1}{9}} + \overset{9)}{\frac{1}{3}} + 1$$

$$= -\frac{1}{27} - \frac{3}{27} + \frac{9}{27} + 1$$

$$= \frac{-1-3+9}{27} + 1$$

$$= \frac{5}{27} + 1 = 1\frac{5}{27} \quad (\approx 1,2)$$

Välillä $[-2, 0]$ funktion f pienin arvo -9 , ja sen funktio saa kohdassa $x = -2$.

Vastaus

pienin arvo -9 kohdassa $x = -2$

12.15

a) Lukujen s ja t summa on 12. Ilmaistaan luku t luvun s avulla.

$$\begin{array}{lcl} s + t = 12 & | -s & \text{Ratkaistaan muuttuja } t. \\ t = 12 - s & & \end{array}$$

b) Koska sekä $s \geq 0$ että $t \geq 0$ ja lukujen s ja t summa on 12, niin kumpikin luku on vähintään 0 ja enintään 12.

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee tutkitun tulon, ja jonka muuttujana on s .

$$\begin{aligned} f(s) &= t \cdot s^2 && \text{Sijoitetaan } t = 12 - s. \\ &= (12 - s) \cdot s^2 \\ &= 12s^2 - s^3 \end{aligned}$$

Polynomifunktio $f(s) = 12s^2 - s^3$ saa suljetulla välillä $0 \leq s \leq 12$ suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f(s) &= 12s^2 - s^3 \\ f'(s) &= 24s - 3s^2 \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{array}{lcl} 24s - 3s^2 = 0 & & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ s = 0 \quad \text{tai} \quad s = 8 & & \end{array}$$

Molemmat nollakohdat kuuluvat välillä $0 \leq s \leq 12$.

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvissa

derivaattafunktion nollakohdissa.

$$f(s) = 12s^2 - s^3$$

$$f'(0) = 0$$

$$f'(12) = 0$$

$$f'(8) = 256 \quad \text{suurin}$$

Tulo on suurin, kun $s = 8$. Tällöin $t = 12 - s = 12 - 8 = 4$.

Luvut ovat siis $s = 8$ ja $t = 4$.

Vastaus

a) $t = 12 - s$

b) $s = 8$ ja $t = 4$

12.16

- a) Janan piste (x, y) on suoralla, joka kulkee pisteiden $(3, 0)$ ja $(0, 6)$ kautta.

Määritetään suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{6-0}{0-3} = \frac{6}{-3} = -2$$

Suora kulkee pisteen $(3, 0)$ kautta ja sen kulmakerroin on -2 . Muodostetaan suoran yhtälö.

$$\begin{aligned} y - 0 &= -2 \cdot (x - 3) & y - y_0 &= k(x - x_0) \\ y &= -2x + 6 \end{aligned}$$

Pisteen koordinaatit toteuttavat siis yhtälön $y = -2x + 6$.

- b) Tulo on $x^2 y = x^2 \cdot (-2x + 6) = -2x^3 + 6x^2$.

Koska janan päätepisteet ovat $(3, 0)$ ja $(0, 6)$, joten on oltava $0 \leq x \leq 3$.

Pitää siis määrittää funktion $f(x) = -2x^3 + 6x^2$ suurin arvo suljetulla välillä $0 \leq x \leq 3$. Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^3 + 6x^2 & \text{Derivoidaan CAS-laskimella.} \\ f'(x) &= -6x^2 + 12x \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-6x^2 + 12x = 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

Molemmat nollakohdat kuuluvat välille $0 \leq x \leq 3$.

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvissa derivaattafunktion nollakohdissa.

$$f(x) = -2x^3 + 6x^2$$

$$f(0) = 0$$

$$f(3) = 0$$

$$f(2) = 8 \quad \text{suurin}$$

Tulon suurin mahdollinen arvo on 8.

Vastaus

a) $y = -2x + 6$

b) 8

12.17

Funktion $f(t) = -0,0006t^4 + 0,02t^3 + 0,88t + 22$ muutosnopeuden ilmaisee derivaattafunktio $f'(t) = -0,0024t^3 + 0,06t^2 - 0,04t + 0,88$.

Polynomifunktio $f'(t) = -0,0024t^3 + 0,06t^2 - 0,04t + 0,88$ saa suljetulla välillä $[1, 31]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa sen derivaattafunktion f'' nollakohdassa.

Funktion f' derivaattafunktio on $f''(t) = -0,0072t^2 + 0,12t - 0,04$.

Ratkaistaan derivaattafunktion f'' nollakohdat.

$$-0,0072t^2 + 0,12t - 0,04 = 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$t \approx 0,34028 \quad \text{tai} \quad t \approx 16,326$$

Vain nollakohta $t \approx 16,326$ kuuluu välille $[1, 31]$.

Lasketaan funktion f' arvot välin päätepisteissä sekä välille kuuluvassa derivaattafunktion f'' nollakohdassa.

$$f'(1) = 0,8976$$

$$f'(31) = -14,1984 \quad \text{pienin}$$

$$f'(16,326) = 5,78 \quad \text{suurin}$$

- a) Funktion f arvot kasvavat nopeimmin, kun derivaattafunktion f' arvo on positiivinen ja mahdollisimman suuri.

Funktion f arvot kasvavat nopeimmin ajanhetkellä $t \approx 16,326$.

Lumen paksuus kasvoi siis nopeimmin tammikuun 16. päivä.

b) Funktion f arvot pienenevät nopeimmin, kun derivaattafunktion f' arvo on negatiivinen ja mahdollisimman pieni.

Funktion f arvot pienenevät nopeimmin ajanhetkellä $t = 31$.

Lumen paksuus pieneni siis nopeimmin tammikuun 31. päivä.

Vastaus

a) tammikuun 16. päivänä

b) tammikuun 31. päivänä

12.18

Pitää osoittaa, että funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$ pienin arvo on vähintään -75 ja suurin arvo enintään 28 , kun muuttujan arvot ovat suljetulla välillä $-3 \leq x \leq 3$.

Polynomifunktio $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$ saa suljetulla välillä $-3 \leq x \leq 3$ suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \cdot 2x - 24 \\ &= 3x^2 - 6x - 24 \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 - 6x - 24 = 0 \qquad a = 3, b = -6, c = -24$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-24)}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm 18}{6}$$

$$x = \frac{6+18}{6} = 4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{6-18}{6} = -2$$

Vain nollakohta $x = -2$ kuuluu välille $-3 \leq x \leq 3$.

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$$

$$f(-3) = 18$$

$$f(3) = -72 \quad \text{pienin}$$



$$f(-2) = 28 \quad \text{suurin}$$

Välillä $-3 \leq x \leq 3$ funktion f suurin arvo on 28 ja pienin arvo -72 .

On osoitettu, että funktion f arvo kuuluu välillä $[-72, 28]$, kun muuttujan x arvo kuuluu välille $[-3, 3]$.



12.19

a)

	-3	-2	1
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$			




Suurimman arvon funktio saa kohdassa $x = -3$ tai $x = 1$.

b)

	-1	3
	+	-
		

Suurimman arvon funktio saa kohdassa $x = 3$.

c)

	-4	-2	3	5
$f'(x)$	-	+	-	
$f(x)$				

Suurimman arvon funktio saa kohdassa $x = -4$ tai $x = 3$.

12.20

- a) Tiedetään, että alaspäin aukeavalla paraabelilla on täsmälleen yksi maksimikohta. Esimerkkifunktioksi voidaan siis valita toisen asteen polynomifunktio, jonka maksimikohta on avoimella välillä $-1 < x < 2$.

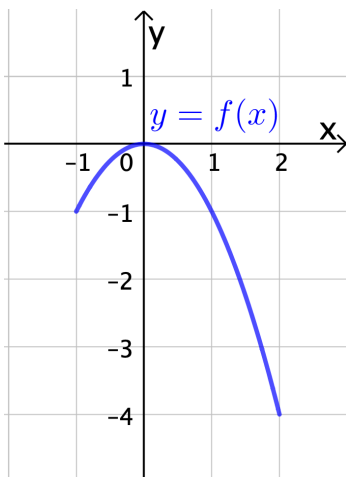
Tällainen funktio on esimerkiksi $f(x) = -x^2$.

Tämän funktion derivaatafunkti on $f'(x) = -2x$.

Derivaatafunktion nollakohta on

$$\begin{array}{l} -2x = 0 \\ x = 0. \end{array} \quad | :(-2)$$

Siten paraabelin huippu ja funktion f ainoa maksimikohta sijaitsee kohdassa $x = 0$.



Kuvaajan piirtäminen ei ole välttämätöntä mutta sillä on helppo havainnollistaa sitä, että valittu funktio täyttää asetetut ehdot.

GeoGebrassa piirto komennolla:

$$-2x, -1 \leq x \leq 2$$

- b) Esimerkiksi sopii ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on välin $-1 \leq x \leq 2$ päätepisteiden puolivälissä. Huipun x -koordinaatti on siis

$$x = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Esimerkkifunktioksi voidaan valita

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= x^2 - x + \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad \text{Sievennetään CAS-laskimella.}$$

Tämän funktion derivaattafunktio on $f'(x) = 2x - 1$.

Derivaattafunktion nollakohta on

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

Lasketaan funktion f arvo välin $-1 \leq x \leq 2$ päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

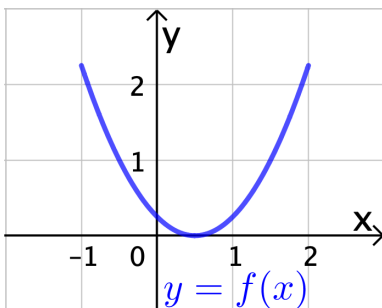
$$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$f(-1) = \frac{9}{4} \quad \text{suurin}$$

$$f(2) = \frac{9}{4} \quad \text{suurin}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Funktio $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ saa suurimman arvonsa välin $-1 \leq x \leq 2$ molemmissa päätepisteissä.



Kuvaajan piirtäminen ei ole välttämätöntä mutta sillä on helppo havainnollistaa sitä, että valittu funktio täyttää asetetut ehdot.

GeoGebrassa piirto komennolla:

$$-2x, -1 \leq x \leq 2$$

12.21

Käsitellään ensin Meerin tekemät virheet.

- 1) Meeri rinnastaa käsitteen 'funktion suurin arvo' ja 'funktion maksimi-arvo' vaikka maksimi-arvo ei välttämättä ole funktion suurin arvo.
- 2) Meeri ei huomioi, että tehtävässä kysytään funktion suurinta arvoa suljetulla välillä, jolloin funktio voi saada suurimman arvonsa myös välin päätepisteessä.
- 3) Meeri on ratkaissut derivaattafunktion nollakohdat ratkaisukaavalla väärin. Siis $x = \frac{7 \pm \sqrt{16}}{6}$ on virheellinen ratkaisu.
- 4) Meerin laskiessa funktion suurinta arvoa, hän sijoittaa derivaattafunktion nollakohdan virheellisesti derivaattafunktion lausekkeeseen $6x^2 - 14x + 5$ eikä funktion lausekkeeseen $2x^3 - 7x^2 + 5x$.

Korjattu ratkaisu:

Polynomifunktio $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x$ saa suljetulla välillä $-1 \leq x \leq 3$ suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot 3x^2 - 7 \cdot 2x + 5 \\ &= 6x^2 - 14x + 5 \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$6x^2 - 14x + 5 = 0$$

$$a = 6, b = -14, c = 5$$

$$x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 5}}{2 \cdot 6} = \frac{14 \pm \sqrt{76}}{12}$$

$$x = \frac{14 - \sqrt{76}}{12} (\approx 0,44) \quad \text{tai} \quad x = \frac{14 + \sqrt{76}}{12} (\approx 1,89)$$

Molemmat nollakohdat kuuluvat välille $-1 \leq x \leq 3$.

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvissa derivaattafunktion nollakohdissa.

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x$$

$$f(-1) = -14$$

$$f(3) = 6 \quad \text{suurin}$$

$$f\left(\frac{14 - \sqrt{76}}{12}\right) \approx 1,015$$

$$f\left(\frac{14 + \sqrt{76}}{12}\right) \approx -2,052$$

Välillä $-1 \leq x \leq 3$ funktion f suurin arvo on 6.